UNIVERSIDAD SIMÓN BOLÍVAR
Departamento de Computación y T. I.
Estructuras Discretas III (CI-2527)
Prof.: S, Carrasquel

Ene-Mar 2022

Práctica 06

Anillos-Dominios de Integridad-Cuerpos

1. Diga cuáles de los siguientes conjuntos con las operaciones indicadas forman un anillo, en caso de no serlo explique por qué.

   (a) $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, con la suma y multiplicación por componentes

   (b) $2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ con la suma y multiplicación por componentes.

   (c) El conjunto de todos los números complejos imaginarios puros, $I = \{ib : b \in \mathbb{R}\}$ con la suma y multiplicación usuales.

2. Dé un ejemplo de un anillo con identidad 1 que contenga un subanillo con identidad 1' distinta de 1.

3. Dé un ejemplo de un subanillo de un anillo con identidad 1 que no posea identidad.

4. Demostrar que el subconjunto $m\mathbb{Z}$ de todos los múltiplos del número entero m es un subanillo de $\mathbb{Z}$.

5. Se considera el conjunto de matrices:

$$\mathcal{A} = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} \ : \ x, y \in \mathbb{R} \right\}.$$

   Demostrar que $\mathcal{A}$ es un subanillo del anillo usual $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ de las matrices cuadradas de orden 2 con entradas reales.

6. *Los cuaterniones de Hamilton*: consideremos en el anillo de las matrices de orden 2 sobre el cuerpo de los números complejos, el subconjunto

$$\mathbb{H} = \left\{ \begin{pmatrix} z & w \\ -\overline{w} & \overline{z} \end{pmatrix} \ : \ z, w \in \mathbb{C} \right\}$$

   donde $\overline{z} = a - bi$ denota el conjugado del complejo $z = a + bi$, con $a, b \in \mathbb{R}$. Demostrar que $\mathbb{H}$ es un subanillo de $M_2(\mathbb{C})$.

7. Demuestre que en un dominio de integridad se satisface

(a) $a + b = a + c \equiv b = c$

(b) $a \cdot 0 = 0$

(c) $a + z = a \equiv z = 0$

(d) $a \neq 0 \Rightarrow (a \cdot z = a \equiv z = 1)$

8. Suma Directa Externa. *Dados dos anillos $\langle A, +\cdot \rangle$ y $\langle B, +', \cdot' \rangle$, si sobre $A \times B$ se define una suma y un producto como sigue:*

$$(a_1, b_1) \dagger (a_2.b_2) = (a_1 + a_2, b_1 +' b_2)$$
$$(a_1, b_1) \star (a_2, b_2) = (a_1 \cdot a_2, b_1 \cdot' b_2)$$

se tiene que $\langle A \times B, \dagger, \star \rangle$ es un anillo. Este anillo se suele representar por $A \otimes B$. Demuestre si $A \otimes B$ es o no un Dominio de integridad.